Τρίτο τεστ Μιγαδικές Συναρτήσεις I

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Τι πρέπει να ισχύει για τα τυχαία, αλλά σταθερά $a, b \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε η

$$f(x+iy) = ax^2 + 2bxy + ay^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

να είναι $\mathbb{C}$ −διαφορίσιμη μόνο στο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0 = 0$.

Θέμα 2

Έστω μιγαδικές σταθερές k, m, n και η ($\mathbb{R}$ −ομοπαραλληλική) συνάρτηση $f(z) = kz + m\bar{z} + n$, $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) f ακέραια

(ii) f $\mathbb{C}$ −διαφορίσιμη στο $z_0 = 0$

(iii) $m = 0$.

Θέμα 3

Ας είναι D ανοιχτό $\subset \mathbb{R}^2$ και μια ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση $f \in C^2(D)$, με

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), (x,y) \in D.$$

Να αποδείξετε ότι οι $u, v\colon D \to \mathbb{R}$ είναι **αρμονικές συναρτήσεις**, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ και } v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Θέμα 4

(i) Να αποδείξετε ότι μία συνάρτηση ορισμένη και ολόμορφη σε έναν τόπο $D \subseteq \mathbb{C}$, της μορφής $f(x+iy) = u(x) + iv(y)$ είναι $\mathbb{C}$ −ομοπαραλληλική (δηλαδή, $f(z) = \lambda z + b$, λ, b μιγαδικές σταθερές).

(ii) Να δείξετε με χρήση των εξισώσεων Cauchy-Riemann ότι μία μιγαδική συνάρτηση f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε ένα σημείο z_0 του πεδίου ορισμού της **αν και μόνο αν** είναι $\mathbb{R}$ −διαφορίσιμη στο z_0 και $\bar{\partial} f(z_0) = 0$. Έπειτα, να εκφράσετε την παράγωγο της f στο σημείο z_0 με χρήση του τελεστή ∂.

(iii) Να εξετάσετε σε ποια σημεία (αν υπάρχουν) του $\mathbb{C}$, η συνάρτηση $f(z) = |z|^{444} - z^{222}$ είναι $\mathbb{C}$ −διαφορίσιμη.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!